

Построение суффиксного дерева
за линейное время
Лекция N 1 курса
“Алгоритмы для Интернета”

Юрий Лифшиц

ПОМИ РАН - СПбГУ ИТМО

Осень 2006

Esko Ukkonen



План лекции

- 1 Введение в суффиксные деревья
 - Определение
 - Два применения
 - Наивный кубический алгоритм

План лекции

- 1 Введение в суффиксные деревья
 - Определение
 - Два применения
 - Наивный кубический алгоритм
- 2 Квадратичный алгоритм

План лекции

- 1 Введение в суффиксные деревья
 - Определение
 - Два применения
 - Наивный кубический алгоритм
- 2 Квадратичный алгоритм
- 3 Линейный алгоритм

Часть I

Что такое суффиксное дерево?

Для чего оно может быть полезно?

Как построить ST за кубическое время?

Определение суффиксного дерева

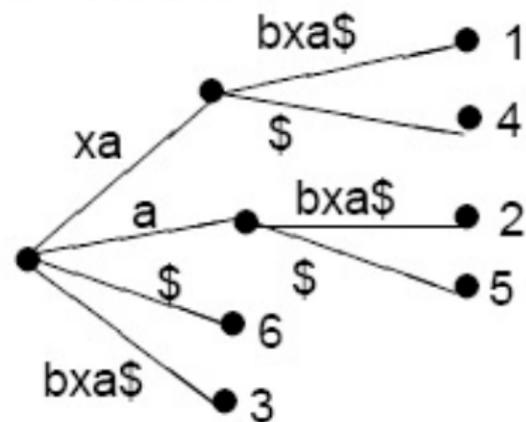
Определение: для текста $T = t_1 \dots t_n$ каждое окончание $t_i \dots t_n$ называется **суффиксом**.

Неформально, чтобы построить **суффиксное дерево** (ST), нужно приписать специальный символ $\$$ к тексту, взять все $n + 1$ суффикс, подвесить их за начала и склеить все ветки, идущие по одинаковым буквам. В каждом листе записывается номер суффикса, который в нем заканчивается.

Пример

Suffix tree

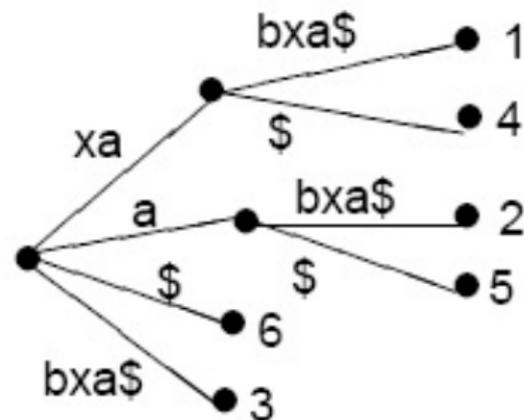
for *xabxa*\$:



Пример

Suffix tree

for *xabxa*\$:

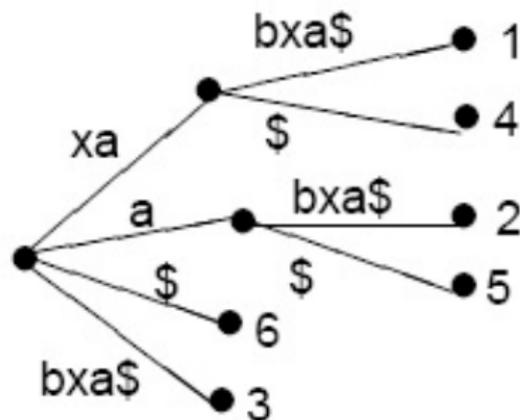


Проблема: как хранить ST используя линейную память?

Пример

Suffix tree

for $xabxa\$$:



Проблема: как хранить ST используя линейную память?

Ответ: хранить длинные длинные ребра как ссылки на сегмент текста $T[u..v]$

Поиск подстрок

Задача: дан текст T . Нужно так его “подготовить” за время $O(n)$, чтобы поиск любого шаблона P занимал время $O(|P|)$

Поиск подстрок

Задача: дан текст T . Нужно так его “подготовить” за время $O(n)$, чтобы поиск любого шаблона P занимал время $O(|P|)$

Решение с помощью ST:

Построим суффиксное дерево для T

Прочитаем шаблон вдоль дерева от корня (пришли в V)

Прочитаем числа, записанные в листьях-потомках V

Эти числа - все начала вхождений P в T

Поиск подстрок

Задача: дан текст T . Нужно так его “подготовить” за время $O(n)$, чтобы поиск любого шаблона P занимал время $O(|P|)$

Решение с помощью ST:

Построим суффиксное дерево для T

Прочитаем шаблон вдоль дерева от корня (пришли в V)

Прочитаем числа, записанные в листьях-потомках V

Эти числа - все начала вхождений P в T

Сложность: $O(|P| + |Output|)$

Наибольшая общая подстрока

Задача: даны тексты T_1 и T_2 . Найти длину их наибольшей общей подстроки.

Наибольшая общая подстрока

Задача: даны тексты T_1 и T_2 . Найти длину их наибольшей общей подстроки.

Самый непосредственный алгоритм?

Наибольшая общая подстрока

Задача: даны тексты T_1 и T_2 . Найти длину их наибольшей общей подстроки.

Самый непосредственный алгоритм?

Решение с помощью ST:

Построим суффиксное дерево для T_1T_2 .

Для каждой внутренней вершины выясняем:

Есть ли у нее одновременно “короткий” потомок и “длинный” потомок?

Находим самую нижнюю такую вершину

Ее глубина - ответ для задачи

Наибольшая общая подстрока

Задача: даны тексты T_1 и T_2 . Найти длину их наибольшей общей подстроки.

Самый непосредственный алгоритм?

Решение с помощью ST:

Построим суффиксное дерево для T_1T_2 .

Для каждой внутренней вершины выясняем:

Есть ли у нее одновременно “короткий” потомок и “длинный” потомок?

Находим самую нижнюю такую вершину

Ее глубина - ответ для задачи

Сложность: $O(|T_1| + |T_2|)$

On-line подход

Будем строить ST не только для всего текста, но и всех его префиксов:

Строим суффиксное дерев для t_1

Расширяем его до дерева для $t_1 t_2$

.

.

.

Расширяем дерево $t_1 \dots t_{n-1}$ до дерева $t_1 \dots t_n$

Расширяем дерево $t_1 \dots t_n$ до дерева $t_1 \dots t_n \$$

Каждый шаг этого списка называется **фазой**

On-line подход

Будем строить ST не только для всего текста, но и всех его префиксов:

Строим суффиксное дерево для t_1

Расширяем его до дерева для $t_1 t_2$

.

.

.

Расширяем дерево $t_1 \dots t_{n-1}$ до дерева $t_1 \dots t_n$

Расширяем дерево $t_1 \dots t_n$ до дерева $t_1 \dots t_n \$$

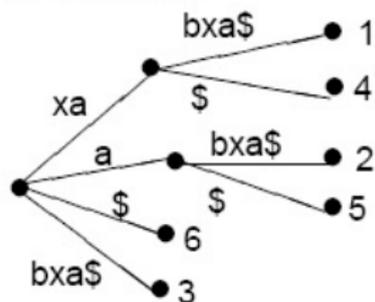
Каждый шаг этого списка называется **фазой**

Все деревья, кроме последнего — **неявные**

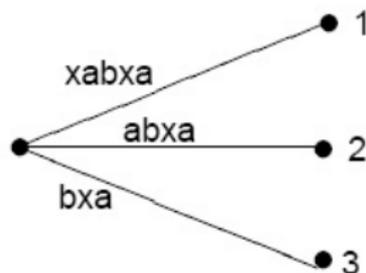
Неявные суффиксные деревья

Неявное суффиксное дерево (IST) - это ST для текста, в котором забыли дописать \$ на конце. Некоторые суффиксы текста в нем заканчиваются не в листьях, и их номер нигде не хранится. Пример:

Suffix tree
for *xabxa\$*:



Implicit suffix tree
for *xabxa*:



Фаза = последовательность продлений

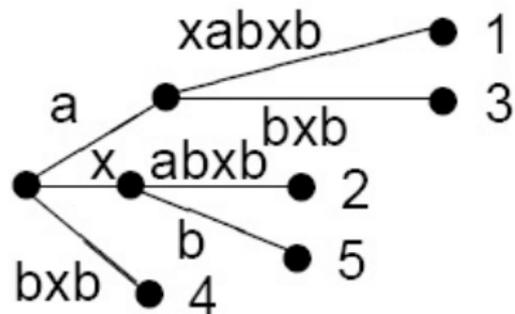
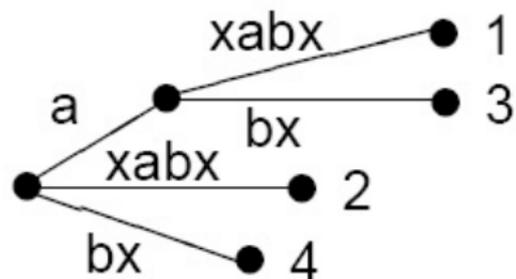
В фазе i мы перестраиваем IST для $t_1 \dots t_i$ в IST для $t_1 \dots t_i t_{i+1}$:

Для каждого j от 1 до i

Находим в дереве конец суффикса $t_j \dots t_i$

и **продляем** его, дорисовывая (если нужно) букву t_{i+1}

Пример одной фазы



Три типа продлений

Продления суффикса могут быть трех видов:

- 1 Продление листа
- 2 Ответвление буквы
(тут возможно создание новой вершины ST)
- 3 Пустое правило
Ничего не дорисовываем, так как буква уже есть

Кубическая оценка времени

Оценка времени нашего алгоритма:

- Всего n фаз
- Фаза i требует i продлений
- Продление j в фазе i требует время $O(i - j)$
- Итого: $O(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i i - j) = O(n^3)$

Часть II

Как улучшить кубический алгоритм до квадратичного?

Сейчас пойдут
кошмарные технические подробности

Удвойте внимание!

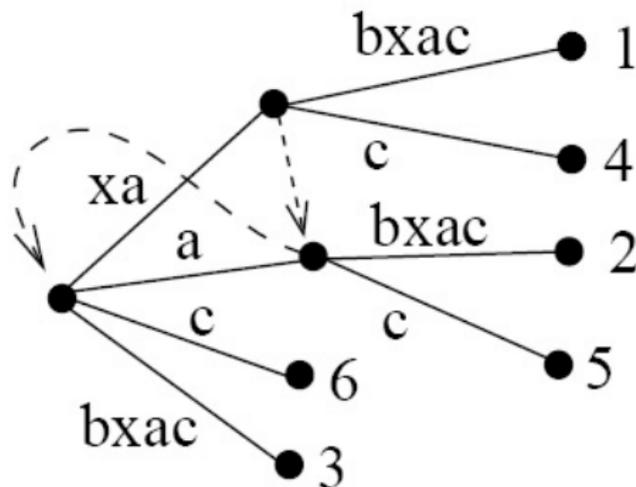
Идея вспомогательных данных

Предположим нужно вычислить массив X_1, \dots, X_n . Иногда полезно поступить так:

- Определить вспомогательный массив Y_1, \dots, Y_n
- Вычислить X_1 и Y_1
- С их помощью вычислить X_2 , затем вычислить Y_2
- ...
- С помощью X_{n-1} и Y_{n-1} вычислить X_n

Определение суффиксных стрелок

Для каждой **внутренней** вершины, соответствующей суффиксу $a_1 \dots a_k$ нарисуем **суффиксную стрелку** (SA) в вершину, соответствующую суффиксу $a_2 \dots a_k$.



Обновление SA с опозданием

Когда нужно рисовать **новую** суффиксную стрелку?

Обновление SA с опозданием

Когда нужно рисовать **новую** суффиксную стрелку?

Ответ: когда мы применили продление по второму правилу (ответвление) к суффиксу $t_j \dots t_i$ и в дереве образовалась новая внутренняя вершина

Обновление SA с опозданием

Когда нужно рисовать **новую** суффиксную стрелку?

Ответ: когда мы применили продление по второму правилу (ответвление) к суффиксу $t_j \dots t_i$ и в дереве образовалась новая внутренняя вершина

Не будем отдельно вычислять SA. Просто перейдем к следующему продлению. Это будет суффикс $t_{j+1} \dots t_i$. Его конец и есть адрес суффиксной стрелки!

Фаза с прыжками

Будем экономить на нахождении всех “хвостов” внутри одной фазы. Пусть мы закончили работу с “хвостом” j -ого суффикса.

Как нам побыстрее найти хвост $(j + 1)$ -ого суффикса?

Фаза с прыжками

Будем экономить на нахождении всех “хвостов” внутри одной фазы. Пусть мы закончили работу с “хвостом” j -ого суффикса.

Как нам побыстрее найти хвост $(j + 1)$ -ого суффикса?

Вверх-Прыжок-Вниз:

- 1 Перейти от j -ого хвоста $t_j \dots t_i$ вверх до ближайшей внутренней вершины $t_j \dots t_k$
- 2 Прыгнуть по суффиксной стрелке в $t_{j+1} \dots t_k$
- 3 Идти вниз, читая текст $t_{k+1} \dots t_i$

Прыжки: подсчет высоты

Будем следить за глубиной указателя в дереве

- При переходе с хвоста на хвост мы делаем один переход вверх (глубина “-1”)
- При переходе по суффиксной стрелке глубина уменьшается не более чем на 1
- Внутри фазы начальная глубина больше конечной

Вывод: глубина **увеличивалась** не более $2i$ раз.

Общая оценка навигации внутри фазы: $4i$ переходов.

Часть III

Как улучшить квадратический алгоритм до линейного?

Анализ операций продления

Напомните три вида продлений

Напомните три вида продлений

- 1 Удлинение: продление листа
- 2 Ответвление буквы
(тут возможно создание новой вершины ST)
- 3 Пустое правило
Ничего не дорисовываем, так как буква уже есть

Анализ операций продления

Напомните три вида продлений

- 1 Удлинение: продление листа
- 2 Ответвление буквы
(тут возможно создание новой вершины ST)
- 3 Пустое правило
Ничего не дорисовываем, так как буква уже есть

Наблюдение: как только мы применили пустое правило, дальше в фазе все продления - пустые

Живые ребра

Наблюдение 2: после того как мы применили правило ответвления и создали новый лист, в следующих фазах к этому листу всегда будет применяться правило удлинения.

Живые ребра

Наблюдение 2: после того как мы применили правило ответвления и создали новый лист, в следующих фазах к этому листу всегда будет применяться правило удлинения.

Способ сэкономить: при создании нового листа кодировать новое ребро как $T[i + 1, x]$, где x - указатель на специальную переменную. Тогда все продления уже созданных листов можно произвести одной операцией $x := x + 1$

Модификация алгоритма

Пусть “непустая часть” фазы $i - 1$ закончилась на суффиксе j^* . Следовательно, к суффиксам $1, \dots, j^*$ применялись только правила 1 и 2, и каждый из них заканчивается в своем собственном листе.

Модификация алгоритма

Пусть “непустая часть” фазы $i - 1$ закончилась на суффиксе j^* . Следовательно, к суффиксам $1, \dots, j^*$ применялись только правила 1 и 2, и каждый из них заканчивается в своем собственном листе.

Фаза i :

- 1 Присвоение $x := x + 1$ одновременно продляет все суффиксы $1..j^*$
- 2 Последовательно продляем суффиксы $j^* + 1, \dots, j'$, где j' - первое применения пустого правила
- 3 Присваиваем $j^* = j' - 1$ и переходим к следующей фазе

Линейная оценка

Оценим время работы алгоритма:

- Участки индивидуальных продлений по фазам перекрываются не более чем по одному суффиксу
- Суммарное количество прыжков при продлениях линейно (аналогично оценкам из квадратичного алгоритма)
- Последняя фаза строит уже явное суффиксное дерево текста

Вот мы и получили оценку $O(n)$!

Главные моменты

Сегодня мы узнали:

- Суффиксное дерево: способ представления текста

Главные моменты

Сегодня мы узнали:

- Суффиксное дерево: способ **представления** текста
- Применения: поиск подстрок, поиск наибольшей общей подстроки

Главные моменты

Сегодня мы узнали:

- Суффиксное дерево: способ **представления** текста
- Применения: поиск подстрок, поиск наибольшей общей подстроки
- Основные идеи алгоритма: on-line построение, вспомогательные суффиксные стрелки, неравномерная оценка времени работы.

Главные моменты

Сегодня мы узнали:

- Суффиксное дерево: способ **представления** текста
- Применения: поиск подстрок, поиск наибольшей общей подстроки
- Основные идеи алгоритма: on-line построение, вспомогательные суффиксные стрелки, неравномерная оценка времени работы.

Главные моменты

Сегодня мы узнали:

- Суффиксное дерево: способ **представления** текста
- Применения: поиск подстрок, поиск наибольшей общей подстроки
- Основные идеи алгоритма: on-line построение, вспомогательные суффиксные стрелки, неравномерная оценка времени работы.

Вопросы?

Страница курса

<http://logic.pdmi.ras.ru/~yura/internet.html>

Использованные материалы:



[Pekka Kilpelainen](#)

Lecture Slides

<http://www.cs.uku.fi/~kilpelai/BSA05/lectures/print07.pdf>



[Esko Ukkonen](#)

On-line construction of suffix trees

<http://www.cs.helsinki.fi/u/ukkonen/SuffixT1withFigs.pdf>