Приглашение в Computer Science

Юрий Лифшиц

ПОМИ РАН - СПбГУ ИТМО

Осень 2006

План лекции

1. Разделение секрета

План лекции

1. Разделение секрета
2. Полезные игры

План лекции

1. Разделение секрета
2. Полезные игры
3. Парадокс заключенного и пробки на дорогах

Часть I

Как выдать по паролю президенту, премьер-министру и министру обороны так, чтобы каждый из них не получил никакой полезной информации, но любые двое смогли бы войти в систему управления ракетами?

Разделение секрета

Общая картина — есть комната управления секретной ракетой, президент, премьер министр и министр обороны. Нужно сделать замок (систему замков) так, что:

A Дверь может открыть каждый из трех

Разделение секрета

Общая картина — есть комната управления секретной ракетой, президент, премьер министр и министр обороны. Нужно сделать замок (систему замков) так, что:

A Дверь может открыть каждый из трех
Решение: выдать каждому по ключу от замка

Разделение секрета

Общая картина — есть комната управления секретной ракетой, президент, премьер министр и министр обороны. Нужно сделать замок (систему замков) так, что:

А Дверь может открыть каждый из трех
Решение: выдать каждому по ключу от замка

Б Дверь можно открыть только при согласии всех трех

Разделение секрета

Общая картина — есть комната управления секретной ракетой, президент, премьер министр и министр обороны. Нужно сделать замок (систему замков) так, что:

А Дверь может открыть каждый из трех
Решение: выдать каждому по ключу от замка

Б Дверь можно открыть только при согласии всех трех
Решение: сделать три разных замка

Разделение секрета

Общая картина — есть комната управления секретной ракетой, президент, премьер министр и министр обороны. Нужно сделать замок (систему замков) так, что:

А Дверь может открыть каждый из трех
Решение: выдать каждому по ключу от замка

Б Дверь можно открыть только при согласии всех трех
Решение: сделать три разных замка

В Если речь идет о пароле?

Разделение секрета

Общая картина — есть комната управления секретной ракетой, президент, премьер министр и министр обороны. Нужно сделать замок (систему замков) так, что:

А Дверь может открыть каждый из трех
Решение: выдать каждому по ключу от замка

Б Дверь можно открыть только при согласии всех трех
Решение: сделать три разных замка

В Если речь идет о пароле?
Простое решение: $p = \text{pas swo rd}$

Разделение секрета

Общая картина — есть комната управления секретной ракетой, президент, премьер министр и министр обороны. Нужно сделать замок (систему замков) так, что:

А Дверь может открыть каждый из трех
Решение: выдать каждому по ключу от замка

Б Дверь можно открыть только при согласии всех трех
Решение: сделать три разных замка

В Если речь идет о пароле?
Простое решение: $p = \text{pas swo rd}$
Хитрое решение: $p = ((p_1 + p_2 + p_3) \mod N)$

Разделение секрета

Общая картина — есть комната управления секретной ракетой, президент, премьер министр и министр обороны. Нужно сделать замок (систему замков) так, что:

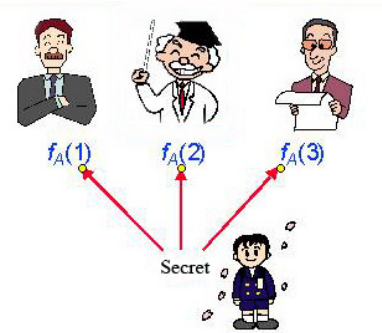
А Дверь может открыть каждый из трех
Решение: выдать каждому по ключу от замка

Б Дверь можно открыть только при согласии всех трех
Решение: сделать три разных замка

В Если речь идет о пароле?
Простое решение: $p = \text{pas swo rd}$
Хитрое решение: $p = ((p_1 + p_2 + p_3) \mod N)$

Г Пароль могут восстановить любые два из трех?

Разделение секрета: постановка



Формализация

Разделить секрет $m \in [1..N]$ между n участниками

Любые t из них могут восстановить m

Любые $t-1$ из них НИЧЕГО не могут узнать про m

Схема Шамира [1979]

Основная идея (из матана):

Зная значения многочлена степени $t-1$ в t точках можно восстановить его значения во всех остальных (интерполяция)

Схема Шамира [1979]

Основная идея (из матана):

Зная значения многочлена степени $t-1$ в t точках можно восстановить его значения во всех остальных (интерполяция)

Зная только $t-1$ значения, невозможно предсказать остальные точки

Схема Шамира II

Подготовительный шаг

Раздающий выбирает простое p, которое больше всех возможных секретов

Схема Шамира II

Подготовительный шаг

Раздающий выбирает простое p, которое больше всех возможных секретов

Кодирование секрета

Выбираем $s_1, s_{t-1} \overset{\text{ran}}{\in} \mathbb{Z}_p$

Устанавливаем $s(x) \overset{def}{=} m + s_1 x + \cdots + s_{t-1} x^{t-1}$

Схема Шамира II

Подготовительный шаг

Раздающий выбирает простое p, которое больше всех возможных секретов

Кодирование секрета

Выбираем $s_1, s_{t-1} \overset{\text{ran}}{\in} \mathbb{Z}_p$

Устанавливаем $s(x) \overset{def}{=} m + s_1 x + \cdots + s_{t-1} x^{t-1}$

Раздача секрета

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$

посылаем участнику i пару чисел $(i, s(i))$

Восстановление секрета

Собрались t человек

Они знают t точек на графике многочлена:

$$(x_1, s(x_1)), \ldots, (x_t, s(x_t))$$

Секрет — это значение в нуле: $m = s(0)$

Восстановление секрета

Собрались t человек

Они знают t точек на графике многочлена:

$$(x_1, s(x_1)), \ldots, (x_t, s(x_t))$$

Секрет — это значение в нуле: $m = s(0)$

Интерполяция Лагранжа:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{t} s(x_i) \frac{\prod_{j \in [1..t]}^{j \neq i} (x_j - x)}{\prod_{j \in [1..t]}^{j \neq i} (x_j - x_i)}$$

Восстановление секрета

Собрались t человек

Они знают t точек на графике многочлена:

$$(x_1, s(x_1)), \ldots, (x_t, s(x_t))$$

Секрет — это значение в нуле: $m = s(0)$

Интерполяция Лагранжа:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{t} s(x_i) \frac{\prod_{j \in [1..t]}^{j \neq i} (x_j - x)}{\prod_{j \in [1..t]}^{j \neq i} (x_j - x_i)}$$

Формула для ответа:

$$m = \sum_{i=1}^{t} s(x_i) \frac{\prod_{j \in [1..t]}^{j \neq i} x_j}{\prod_{j \in [1..t]}^{j \neq i} (x_j - x_i)}$$

Часть II

Как использовать умственные силы, которые тратят люди, играя в компьютерные игры?

Для сравнения

На игру в солитер человечество тратит **миллиард** человеко-часов в год

На постройку Панамского канала ушло **двадцать млллионов** человеко-часов

Для сравнения

На игру в солитер человечество тратит **миллиард** человеко-часов в год

На постройку Панамского канала ушло **двадцать мллионов** человеко-часов

Панамский канал мог быть построен за 8 дней!

Как использовать игроков?

Ваши идеи?

Как использовать игроков?

Ваши идеи?

Luis von Ahn: надо пропагандировать **игры с полезной целью**

Как использовать игроков?

Ваши идеи?

Luis von Ahn: надо пропагандировать **игры с полезной целью**

Задача, которую на могут решить **компьютеры**:

По картинке составить список изображенных на ней объектов

ESP Game

Правила:

- Это on-line игра (http://www.espgame.org)
- Игроки разбиваются на пары случайным образом
- Игрокам показывают картинки
- Цель раунда: как можно быстрее независимо напечатать общее слово
- Иногда, рядом с картинкой появляется список запрещенных слов. Нужно найти общее слово за пределами списка.

Результат ESP Game

Огромная база меток для изображений

Применение: поиск изображений

Результат ESP Game

Огромная база меток для изображений

Применение: поиск изображений

Другие игры:

- Peekaboom
- Verbose

Общая схема (1/2)

Пусть задача — это неизвестное соответствие **ответов** некоторым **входным данным**

Симметричная игра

- Оба игрока получают входные данные
- Должны как можно быстрее набрать одинаковый ответ
- Возможно использование запрещенных ответов

Общая схема (2/2)

Пусть задача — это неизвестное соответствие **ответов** некоторым **входным данным**

Асимметричная игра

- Первый игрок получает вход
- Первый игрок посылает второму игроку возможные ответы
- Второй игрок должен угадать входные данные

Часть III

Две истории о том, к чему приводит эгоизм

Парадокс заключенного

Каждый из двух заключенных может или **дать показания** против напарника, или **промолчать**

Система наказаний:

- Оба дали показания: **пять лет каждому**
- Оба промолчали: **год каждому**
- Один дал показания: **его отпускают, второму дают пятнадцать лет**

Парадокс заключенного

Каждый из двух заключенных может или **дать показания** против напарника, или **промолчать**

Система наказаний:

- Оба дали показания: **пять лет каждому**
- Оба промолчали: **год каждому**
- Один дал показания: **его отпускают, второму дают пятнадцать лет**

Как бы вы поступили?

Пробки на дорогах (1/2)

Между A и B есть две дороги и 100 автомобилистов

- Первая дорога занимает час
- Вторая дорога занимает $\frac{x}{100}$ часов, где x — число автомобилей на второй дороге

Пробки на дорогах (1/2)

Между A и B есть две дороги и 100 автомобилистов

- Первая дорога занимает час
- Вторая дорога занимает $\frac{x}{100}$ часов, где x — число автомобилей на второй дороге

Какую дорогу вы выбираете?

Пробки на дорогах (2/2)

Нужно проехать от A к B, есть промежуточные пункты C и D

- Дороги AC и DB занимают $\frac{x}{100}$
- Дороги AD и CB занимают 1 час
- Дорога CD занимает 0 секунд

Пробки на дорогах (2/2)

Нужно проехать от A к B, есть промежуточные пункты C и D

- Дороги AC и DB занимают $\frac{x}{100}$
- Дороги AD и CB занимают 1 час
- Дорога CD занимает 0 секунд

Закрытие дороги CD уменьшает среднее время проезда!

Задача на дом

Вы хотите повесить несколько обычных замков и раздать ключи, чтобы было выполнено правило доступа “6 из 11”.

Какое минимальное число замков вам понадобится?

Главные моменты

Сегодня мы узнали:

- Разделение секрета: используется интерполяция многочленов

Сегодня мы узнали:

- Разделение секрета: используется интерполяция многочленов
- Игры с пользой: ESP Game

Сегодня мы узнали:

- Разделение секрета: используется интерполяция многочленов
- Игры с пользой: ESP Game
- Математическая модель эгоистического поведения: парадокс заключенного

Сегодня мы узнали:

- Разделение секрета: используется интерполяция многочленов
- Игры с пользой: ESP Game
- Математическая модель эгоистического поведения: парадокс заключенного

Сегодня мы узнали:

- Разделение секрета: используется интерполяция многочленов
- Игры с пользой: ESP Game
- Математическая модель эгоистического поведения: парадокс заключенного

Вопросы?

Источники

Домашняя страница http://logic.pdmi.ras.ru/~yura

Ссылки:

 Luis von Ahn

 Adi Shamir

 Tim Roughgarden